

Aufgabe :

Ein Großunternehmer bietet einem Einzelhändler aus Restbeständen ein sehr umfangreiches Sortiment von klaren und matten Glühlampenlampen zu einem günstigen Pauschalpreis an, da die Produktion laut neuester EU-Norm nicht mehr erlaubt ist. Der Einzelhändler ist interessiert, falls der Anteil der matten Lampen ein Fünftel der Gesamtzahl nicht übersteigt. Dies wird von der Firma als Vereinbarung zugesagt. Der Händler macht die Annahme des Sortimentes vom Ausgang einer Stichprobe vom Umfang 100 abhängig. Die Sendung darf vom Händler zurückgeschickt werden, wenn in der Stichprobe mindestens 20 matte Lampen sind.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (das Risiko) dafür, dass der Händler ein vereinbarungsgemäßes Angebot ablehnt.
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Sendung angenommen, die tatsächlich qualitativ schlechter ist, nämlich die $\frac{1}{3}$ matte Glühlampen enthält?

Nehmen Sie zu beiden Entscheidungen (a und b) kurz Stellung.

(16 Pkte.)

Musterlösung : (Alle Voraussetzungen benennen, um das gegebene Problem in das Modell der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu übertragen.)

Ich fasse das Ziehen einer Glühlampe als ein Bernoulliexperiment auf, mit $P(M) \leq 0,2$; $P(\overline{M}) > 0,8$
Im ungünstigsten Fall für den Händler kann man mit $P(M) = 0,2$; $P(\overline{M}) = 0,8$ rechnen.

Da das Sortiment sehr umfangreich ist, kann man bei der Stichprobe vom Umfang 100 mit einer Bernoullikette der Länge $n = 100$ rechnen, ohne einen großen Fehler zu begehen, da die Glühlampen nicht zurückgelegt werden.

Die Zufallsvariable (oder Zählfunktion) X zähle die Anzahl k der matten Glühlampen von $n = 100$ gezogenen. X ist dann $B_{100;0,2}$ -verteilt.

Die Ergebnismenge besteht aus 100-Tupeln: $S = \{(s_1; s_2; \dots; s_{100}) | s_i \in \{M; \overline{M}\}\}$

- a) Gesucht ist: $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) = 1 - F_B(100; 0,2; 19) \approx 0,5398$

Interpretation: Bei der Entscheidung, die Sendung zurückzuschicken, wenn in der Stichprobe von 100 zufällig gezogenen G-lampen mindestens 20 matt sind, irrt sich der Händler zu ca. 54%. Die Sendung ist nämlich vereinbarungsgemäß! Das Risiko, eine günstige Sendung nicht anzunehmen, ist für den Händler also relativ groß.

- b) Gesucht ist: $P(Y \leq 19)$, wenn die Zufallsvariable Y jetzt die matten G-lampen zählt und tatsächlich $B_{100;\frac{1}{3}}$ -verteilt ist. $P(Y \leq 19) = F_{100;\frac{1}{3}}(19) \approx 0,001$

Interpretation: Der Händler akzeptiert die Sendung bei derselben Entscheidungsregel mit nur ca. 0,1%, obwohl sie den vereinbarten Ansprüchen nicht genügt. Dieses Risiko ist also für den Händler sehr gering.